„Ethos” 32(2019) nr 3(127) 68-90
DOI 10.12887/32-2019-3-127-07

Waldemar CZAJKOWSKI

MATEMATYKA A PIĘKNO

Istnieją pojęcia matematyczne, które zasługują na miano pięknych. Być może jednym z najpiękniejszych (o ile nie najpiękniejszym) jest pojęcie symetrii − bardzo intuicyjne, zrozumiałe dla ludzi, którzy z matematyką nigdy nie mieli nic wspólnego. Jest to również pojęcie naturalne – obecne w naszym doświadczaniu, a w szczególności w estetycznym przeżywaniu otaczającego nas świata.

Prawda, Dobro, Piękno – trzy transcendentalia aksjologiczne[1] – co najmniej od czasów Platona stanowią swego rodzaju „rdzeń” kultury europejskiej. Zrozumienia istoty tych wartości możemy zapewne poszukiwać na wielu drogach. Wspomnijmy tu o trzech z nich. Pierwsza to droga właściwa metafizyce, drugą i trzecią można byłoby natomiast określić łącznie mianem drogi fenomenologicznej.

Wspólną cechę drogi drugiej i trzeciej stanowi prowadzenie dociekań na podstawie opisu i analizy różnorodnych fenomenów i sposobów ich doświadczania, tym natomiast, co je odróżnia, jest przyjęcie (w przypadku drugiej) bądź odrzucenie (w przypadku trzeciej) pewnego przeświadczenia (artykułowanego mniej lub bardziej wyraźnie, mniej lub bardziej stanowczo) – przeświadczenia, że każda z trzech wartości realizuje się we właściwym sobie obszarze. Wybierając drugą z tych dróg, istoty Prawdy poszukiwalibyśmy w obszarze nauki, istoty Dobra – w obszarze religii, a Piękna – sztuki. Ja wybrałem drogę trzecią. Jej punkt wyjścia stanowi odrzucenie tego przeświadczenia i przyjęcie, że „triada platońska” obecna jest w każdej dziedzinie kultury. Systematyczne uzasadnienie tej decyzji wymagałoby odrębnego tekstu. Niniejszy artykuł można potraktować jako fragment takiego uzasadnienia. Zamierzam pokazać, że piękno – wiązane głównie ze sztuką[2] – jest też

[1] Na temat pojęcia transcendentaliów aksjologicznych por. W. S t r ó ż e w s k i, *Ontologia*, Znak, Kraków 2003, s. 193.

[2] Na podstawie pracy pod redakcją Krystyny Wilkoszewskiej *Estetyki filozoficzne XX wieku* można przypuszczać, że (pomimo pewnych zmian, o których wspomnę pod koniec tego artykułu) także estetyka współczesna skupia się na sztuce (zob. *Estetyki filozoficzne XX wieku*, red. K. Wilkoszewska, Universitas, Kraków 2000).

wartością fundamentalną dla matematyki, dziedziny niejednokrotnie (zwłaszcza w myśleniu potocznym[3]) przeciwstawianej sztuce[4].

Teza ta, raczej rzadko rozważana przez estetyków, akceptowana jest dość powszechnie przez samych matematyków. Zacytujmy tu dla przykładu wybitnego współczesnego matematyka i fizyka Rogera Penrose'a. W pierwszym rozdziale (zatytułowanym „Korzenie nauki") swej monumentalnej książki *Droga do rzeczywistości*, będącej swego rodzaju syntezą tej części wiedzy matematycznej i fizycznej, która jest niezbędna dla zrozumienia fundamentalnych zasad rządzących Wszechświatem, zamieścił podrozdział „Dobro, Prawda i Piękno". Zapowiada w nim, że w dalszych rozdziałach książki czytelnicy natkną się „na zadziwiające związki między prawdą i pięknem"[5]. Podkreśla też, że „niezależnie od niewątpliwej i często dwuznacznej roli piękna w poszukiwaniu matematyki opisującej świat fizyczny, kryteria estetyczne mają fundamentalne znaczenie dla rozwoju samej matematyki"[6]. Dodaje też bardzo interesującą – jak sądzę – uwagę o charakterze epistemologiczno-psychologicznym: „Jestem […] skłonny uważać, że istotnym elementem przekonania matematyka, iż świat platoński istnieje poza nami, jest właśnie, tak często odkrywana, nadzwyczajna i nieoczekiwana ukryta uroda samych idei"[7].

O PIĘKNIE MATEMATYKI

Punktem wyjścia refleksji nad pięknem matematyki zamierzam uczynić – zgodnie z przyjętą tu (szeroko rozumianą) perspektywą fenomenologiczną[8] – opis jego różnorodnych przejawów.

[3] „Niedostrzeganie elementu estetycznego w matematyce jest szeroko rozpowszechnione – pisali kilka dekad temu wybitni amerykańscy matematycy: Phillip J. Davies i Reuben Hersh – i może rodzić wrażenie, że matematyka jest sucha jak kurz, ekscytująca jak książka telefoniczna, odległa jak prawa XV-wiecznej Szkocji przeciwko złodziejom dzieci" (Ph.J. D a v i e s, R. H e r s h, *Świat matematyki*, tłum. R. Duda, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, s. 150). Czy sytuacja uległa zmianie? A jeśli tak, to czy aby na pewno na lepsze?

[4] Zasygnalizujmy tylko, że problematykę tę można byłoby rozpatrywać w szerszym kontekście relacji – czy, jeśli zgodzić się z Charlesem P. Snowem – konfliktu między nauką (ang. science) a humanistyką. Szerzej na ten temat zob. W. C z a j k o w s k i, *Dwie kultury w perspektywie historycznej socjologii wiedzy*, w: *Czy dwie kultury?*, red. J. Rąb, Stowarzyszenie na Rzecz Rozwoju Nauki Polskiej, Zabrze 2005, s. 69-94.

[5] R. P e n r o s e, *Droga do rzeczywistości. Wyczerpujący przewodnik po prawach rządzących Wszechświatem*, tłum. J. Przystawa, Prószyński i S-ka, Warszawa [b.r.w.], s. 21. Nie od rzeczy będzie przytoczyć wypowiedź Martina Gardnera: „Osiągnięcia Penrose'a w matematyce i fizyce […] wynikają z zadziwienia i zachwytu nad tajemnicą i pięknością bytu" (M. G a r d n e r, *Słowo wstępne*, w: R. Penrose, *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, tłum. P. Amsterdamski, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, s. 12).

[6] P e n r o s e, *Droga do rzeczywistości*, s. 21.

[7] Tamże, s. 21n.

[8] „Punktem wyjścia metody fenomenologicznej jest doświadczenie. Fenomenologia rozumie je szeroko, w szczególności nie redukuje go do doświadczenia zmysłowego. Każda dziedzina fenome-

PIĘKNO WZORÓW

Wielu z nas matematyka (szkolna) kojarzy się z tablicami matematyczno-fizycznymi, czy innymi kompendiami zawierającymi setki wzorów (głównie równości, czasami nierówności), z których wiele (na szczęście nie wszystkie) powinniśmy zapamiętać, a także umieć się nimi posługiwać w rozwiązywaniu rozmaitych zadań. Gdzież tu miejsce na piękno? A jednak są wzory, które matematycy na ogół uznają za piękne, są takie, które uznają za ładne, i takie, którym nie przypisują pozytywnej klasyfikacji estetycznej. (Co ciekawe, raczej trudno spotkać charakterystykę negatywną; słowo „brzydki" rzadko – jeśli w ogóle – łączone jest z frazą „wzór matematyczny"). Przyjrzyjmy się wzorowi, który powszechnie uważany jest przez matematyków za jeden z najpiękniejszych (czy wręcz – za najpiękniejszy[9]). Wzór ten wiąże ze sobą pięć liczb: $e^{\pi i} + 1 = 0$. Cóż w nim pięknego?

Po pierwsze, jest bardzo prosty: stwierdza, że dwie liczby zsumowane dają zero − to najzupełniej elementarna arytmetyka. Aby jednak w pełni docenić piękno tego wzoru, potrzeba wiedzieć nieco więcej o liczbach. Trzeba wiedzieć, czym jest potęgowanie (to wiedza elementarna), a ponadto – co może nieco mniej powszechne – zdawać sobie sprawę, że wykładnikiem potęgi mogą być rozmaite liczby – nie tylko całkowite (takie jak: −2, 0, +3), ale także niewymierne, a nawet zespolone. Trzeba też wiedzieć, że we wzorze tym występują liczby „bardzo ważne". Ważność zera i jedynki jest dość oczywista; w żargonie matematycznym mówi się, że są one „elementami neutralnymi" – odpowiednio − dodawania i mnożenia. Ważność liczby π jest też raczej oczywista. Liczba ta występuje we wzorach na pole koła czy powierzchnię kuli. Warto dodać, że pojawia się także w innych obszarach matematyki, na przykład we wzorze opisującym tak zwaną krzywą dzwonową Gaussa, mającą fundamentalne znaczenie w rachunku prawdopodobieństwa i w statystyce matematycznej. Właśnie ta różnorodność kontekstów, w których π odgrywa istotną rolę, czyni z niej liczbę szczególnie ciekawą. Liczba e – równie doniosła jak π – jest (wśród większości nie-matematyków) mniej znana. Mimo że jest bardziej skomplikowana niż na przykład liczba 2 (trzeba ją bowiem

---

nów […] wymaga swoistego sposobu doświadczenia, zgodnego z naturą danego fenomenu: inaczej doświadcza się przedmiotów materialnych, […] inaczej doświadczane są idee" (W. S t r ó ż e w s k i, *Estetyka fenomenologiczna*, w: *Estetyki filozoficzne XX wieku*, s. 9). Taka charakterystyka perspektywy (metody) fenomenologicznej jest − jak sądzę − na potrzeby niniejszego tekstu wystarczająca.

[9] Por. K. T u r z y ń s k i, *Zgłębiając piękno matematyki*, „Delta" 2014, nr 4, s. 21. Nawiasem mówiąc, autor omawia w tym tekście przeprowadzane za pomocą rezonansu magnetycznego badania neurologiczne (sic!) nad doznaniami estetycznymi związanymi z matematyką. Badania te wydają się niezwykle interesujące (zob. S. Z e k i, J.P. R o m a y a, D.M.T. B e n i n c a s a, M.F. A t y i y a h, *The Experience of Mathematical Beauty and its Neural Correlates*, „Frontiers in Human Neuroscience" 8(2014), https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fnhum.2014.00068/full).

definiować jako granicę pewnego ciągu liczb wymiernych[10]), pozwala na zdefiniowanie najprostszej (w pewnym sensie, którego nie ma potrzeby tu precyzować) postaci funkcji wykładniczej (czyli funkcji postaci a^x). Nieco większe trudności sprawia liczba i. Jej formalna definicja jest tyleż prosta, co − dla spotykających się z nią po raz pierwszy – zaskakująca: $i^2 = -1$. Jest to jednak najprostsza liczba zespolona (niebędąca liczbą rzeczywistą; liczby rzeczywiste stanowią podzbiór zbioru liczb zespolonych). Za pomocą tej liczy i wszystkich liczb rzeczywistych można zdefiniować wszystkie liczby zespolone (każda liczba zespolona dana jest wzorem: $z = a+bi$, gdzie a oraz b to liczby rzeczywiste) – liczby o ogromnej doniosłości i dla matematyki, i dla fizyki[11]. Taka wiedza na temat pięciu liczb występujących w omawianym tu wzorze wystarczyłaby zapewne do zrozumienia, dlaczego uważa się go za piękny. Myślę jednak, że warto dodać, iż zarówno liczba π, jak i liczba e są nie tylko liczbami niewymiernymi (niedającymi się przedstawić jako ułamki) znanymi od czasów Pitagorasa, lecz także liczbami przestępnymi − w językach zachodnich zwanymi liczbami transcendentalnymi (niech koledzy filozofowie wybaczą, ale po prostu tak się one tam od dawna nazywają – bez żadnego szczególnego związku z Tomaszem z Akwinu czy Edmundem Husserlem; jedyny związek ma charakter językowy, etymologiczny: i w filozofii, i w matematyce źródłem tej nazwy jest łacińskie „transcendere") – czyli nie są pierwiastkami żadnego równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych. Podsumujmy, korzystając ze sformułowania Penrose'a: relatywnie prosty „wzór, w sposób nieomal mistyczny, łączy ze sobą pięć fundamentalnych liczb"[12].

Po drugie, mimo swej (względnej) prostoty jest on wzorem zaskakującym – ogólna wiedza o liczbach i wykonywanych na nich operacjach nie sugeruje nam, że „jakoś tak powinno być". Znamy wiele wzorów prostych, ale zupełnie niezaskakujących: intuicja matematyczna mówi nam, że właśnie „tak jakoś powinno być" (jak choćby w przypadku wzoru wyrażającego przemienność dodawania i mnożenia: $a+b = b+a$, $ab=ba$). Nie uznajemy tych wzorów za piękne. Z drugiej strony, istnieje wiele wzorów tak skomplikowanych, że nie tylko intuicja nic nam w odniesieniu do nich nie podpowiada, ale też z trudem ogarniamy ich sens.

---

[10] Oto definicja: $e = \lim(1 + 1/n)^n$.

[11] „Magia liczb zespolonych sama w sobie jest zjawiskiem cudownym i dlatego wartym bliższego poznana" – pisze Penrose (P e n r o s e, *Droga do rzeczywistości*, s. 72). Podkreśla też, że „dla wszystkich, którzy nie wierzyli w «praktyczne» aspekty liczb zespolonych, musiało być ogromnym zaskoczeniem, kiedy w ostatnich ćwierćwieczach XX stulecia okazało się, że prawa rządzące zachowaniem się Wszechświata w sposób fundamentalny związane są z liczbami zespolonymi" (tamże, s. 71).

[12] Tamże, s. 53.

Po trzecie, jeśli wykroczy się poza sam wzór i uwzględni jego dowód, dostrzeże się jego doniosłość. W zwięzłej, zwartej formie pokazuje on – poza związkiem między kilkoma (bardzo ważnymi) liczbami – także znacznie bardziej uniwersalny związek między dwiema ważnymi klasami funkcji: funkcji wykładniczych oraz funkcji trygonometrycznych. Myślę, że piękno wielu − czy wszystkich? − wzorów dałoby się scharakteryzować jako połączenie prostoty (zawsze, rzecz jasna, względnej), zaskoczenia (nieoczywistości) i doniosłości.

Z pewnego powodu (o którym za chwilę), chciałbym powyższe rozważania o pięknie wzorów matematycznych uzupełnić jednym jeszcze przykładem. Jak wspominałem wyżej, dobrze nam wszystkim znana liczba π jest nie tylko liczbą niewymierną, ale i – przestępną. Da się ją jednak przedstawić za pomocą następującego wzoru: $\pi /4 = 1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9\ldots$[13]. Wzór ten jest prosty (dla jego zrozumienia wystarczy intuicyjne uchwycenie sensu pojęcia szeregu nieskończonego – osiągalne na przykład dla każdego, kto zetknął się z paradoksem Achillesa i żółwia), ale też zaskakujący, a ponadto doniosły matematycznie oraz – jak się wydaje – filozoficznie. Nie ulega wątpliwości, że do ważnych par pojęć filozoficznych (takich, jak na przykład umysł−ciało) zaliczyć można także parę porządek−chaos. Przywołany tu wzór zdaje się wskazywać na pewną względność tej opozycji. Oto z jednej strony równości mamy liczbę, której rozwinięcie dziesiętne jest – chciałoby się rzec – skrajnie nieregularne (chaotyczne), z drugiej natomiast − bardzo regularny ciąg składników sumy nieskończonej. Okoliczność ta dodaje − moim zdaniem − estetycznego uroku temu wzorowi.

PIĘKNO POJĘĆ MATEMATYCZNYCH

Tym, co − oprócz wzorów− kojarzy się zdecydowanej większości z nas z matematyką, są definicje pojęć matematycznych, na przykład kwadratu, trapezu, pochodnej czy całki. Czy mówienie o pięknie pojęć (matematycznych) ma sens? Z pewnością w wielu przypadkach trudno byłoby uzasadnić odpowiedź twierdzącą. Myślę jednak, że ogólna odpowiedź jest właśnie taka, ponieważ istnieją pojęcia matematyczne, które zasługują na miano pięknych. Być może jednym z najpiękniejszych (o ile nie najpiękniejszym) jest pojęcie symetrii − bardzo intuicyjne, zrozumiałe dla ludzi, którzy z matematyką nigdy nie mieli nic wspólnego. Jest to również pojęcie naturalne – obecne (co uświadamiamy sobie w mniejszym lub większym stopniu) w naszym do-

[13] Nie jest to jedyny wzór tego rodzaju. Dla ilustracji przytoczmy inną – nie mniej zaskakującą i prostą – równość (udowodnioną przez Eulera): $\pi^2 /6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2\ldots$

świadczaniu, a w szczególności w estetycznym przeżywaniu otaczającego nas świata (pomyślmy tylko o roli symetrii w postrzeganiu ludzkiego ciała; przypomnijmy też sobie, jaką reakcję wywoływały niektóre dzieła Picassa przedstawiające drastycznie asymetryczne obrazy ludzkiej twarzy). Będąc niezwykle ważnym pojęciem geometrycznym, pozwala ono − jeśli zostało zdefiniowane w dostatecznie abstrakcyjny sposób − charakteryzować właściwości obiektów innych niż geometryczne, na przykład równań algebraicznych (co odkryto stosunkowo niedawno, bo w wieku dziewiętnastym, między innymi za sprawą Évariste'a Galois). Fakt ten powinien być szczególnie interesujący dla filozofów (i tym samym dodawać pojęciu symetrii dodatkowego uroku): pojęcie symetrii oraz powiązane z nim algebraiczne pojęciu grupy pozwoliły na udowodnienie bardzo ważnego twierdzenia. Twierdzenie to zasługuje moim zdaniem na miano „twierdzenia limitacyjnego”[14], czyli twierdzenia, które w ścisły matematyczny sposób dowodzi istnienia (określonych, konkretnych) granic poznania matematycznego. Zgodnie z twierdzeniem, o którym tu mowa, nie istnieją ogólne (tego rodzaju, który znamy ze szkoły w odniesieniu do równań stopnia drugiego) wzory na pierwiastki równań algebraicznych stopnia wyższego niż czwarty. Pojęcie symetrii znajduje także niezwykle szerokie zastosowanie w fizyce. Dla filozofów bodaj najciekawsze jest twierdzenie Emmy Noether opisujące związek między rodzajami symetrii (klasyfikowanie symetrii to osobne, niezwykle obszerne zagadnienie; tu wystarczy wskazać na intuicyjnie oczywisty fakt: zbiór symetrii koła jest nieskończony[15], kwadratu natomiast – ośmioelementowy), a zasadami zachowania, na przykład zasadą zachowania energii. Wydaje się, że pojęcie symetrii spełnia kryteria analogiczne do tych, które spełniają niektóre wzory matematyczne: jest (relatywnie) proste, pozwala uzyskać zaskakujące i filozoficznie ciekawe twierdzenia oraz ma niezwykle szeroki obszar zastosowań. Bez wątpienia zasługuje zatem na miano pojęcia pięknego.

Kwestii piękna pojęć zamierzam jeszcze poświęcić nieco miejsca, najpierw jednak kilka słów o pewnym problemie z zakresu aksjologii ogólnej. Otóż mówiąc o wartościach, możemy myśleć o nich jako o pewnych charakterystykach bezwzględnych czy dychotomicznych (takich, jak: dobry–zły, prawdziwy–fałszywy, piękny–brzydki) albo względnych[16] czy stopniowalnych (na przykład: lepszy–gorszy, prawdziwszy–fałszywszy, piękniejszy–brzydszy). Osobiście

[14] Najbardziej znanym twierdzeniem limitacyjnym jest oczywiście twierdzenie Gődla, twierdzeniami limitacyjnymi są też między innymi twierdzenia Churcha, Skolema i Tarskiego.

[15] Każda prosta przechodząca przez środek koła wyznacza pewną jego symetrię. Takich prostych jest nieskończenie (i to nieprzeliczalnie) wiele.

[16] Podkreślmy, że względność, o której tu mowa, nie ma nic wspólnego z rozmaitymi relatywizmami: to, że Jan jest wyższy od Pawła, a niższy od Gawła, jest „twardym”, obiektywnym faktem, nienasuwającym żadnych myśli o względności (subiektywności) postrzeżeń zmysłowych.

skłaniam się do traktowania wszelkich wartości jako stopniowalnych. Jest to jednak kwestia, która wymagałaby osobnej dyskusji. Tutaj pragnę ograniczyć się do wskazania na możliwość stopniowalności w odniesieniu do kategorii, jaką jest piękno pojęć matematycznych. Sądzę mianowicie, że pojęcie, które zamierzam teraz krótko omówić, to pojęcie piękne, mniej jednak piękne niż pojęcie symetrii.

Równoliczność zbiorów – właśnie o niej będzie mowa − jest pojęciem niezwykle prostym. Jego sens powinny zrozumieć nawet dzieci nieumiejące jeszcze liczyć. Jeśli ustawić dziewczynki i chłopców w pary i nikt nie zostanie, to wiadomo, że chłopców i dziewczynek jest tyle samo; jeśli zaś zostanie na przykład jedna dziewczynka (lub kilka dziewczynek), to znaczy, że dziewczynek jest więcej – trudno chyba o prostsze rozumowanie. Pozostaje „drobiazg": przeniesienie tego rozumowania na dowolne zbiory, w tym – na zbiory nieskończone. Krok ten wymaga zapewne nieco większej zdolności do abstrakcyjnego myślenia niż ta występująca u przedszkolaków… Pojęcie równoliczności zbiorów ujawnia całe swe znaczenie w kontekście innego pojęcia – przywodzącego na myśl rosyjskie „matrioszki" pojęcia zbioru zbiorów. Chodzi o to, że elementami zbiorów mogą być – zbiory. Wyjściowa intuicja znów jest bardzo prosta: bombonierka to zbiór czekoladek, pewna liczba bombonierek to paczka, pewna liczba paczek – ładunek pojedynczego TIR-a, pewna liczba załadowanych TIR-ów – realizowane zamówienie… Można w ten sposób kontynuować rozumowanie dowolnie długo. Od tej intuicji niedaleko już (choć nieco siły abstrakcji trzeba tu użyć) do idei tak zwanego zbioru potęgowego: zbioru złożonego ze wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru. Tak więc, mając dany jakiś zbiór, mamy również pewien zbiór zbiorów: zbiór złożony ze wszystkich jego podzbiorów (w tym: zbioru pustego i zbioru pełnego, czyli po prostu samego zbioru wyjściowego), zwany zbiorem potęgowym[17]. Również do niego możemy zastosować tę samą „receptę" i utworzyć jego zbiór potęgowy. I tak – ad infinitum: otrzymujemy nieskończony ciąg zbiorów. Można dowieść, że każdy ze zbiorów w tym ciągu jest – w pewnym dobrze sprecyzowanym sensie (pojęcie równoliczności jest tu kluczowe) – większy od poprzedniego. Jeśli zbiór wyjściowy był skończony, to każdy następny w tym ciągu – choć większy od poprzednich – także jest skończony. Jeśli zaś zaczniemy od razu od zbioru nieskończonego, powiedzmy – od zbioru wszystkich liczb naturalnych, to otrzymamy nieskończony ciąg zbiorów „coraz bardziej nieskończonych". Okazuje się więc, że istnieje nieskończenie wiele coraz większych nieskończoności. Odnosząc się do tego odkrycia, wielki matematyk niemiecki David Hilbert stwierdził: „Z raju, który

[17] Nazwa „zbiór potęgowy" wiąże się z faktem, że zbiór skończony, składający się z n elementów ma dokładnie 2^n podzbiorów.

stworzył nam Cantor, nikomu nie wolno nas wypędzić”[18]. Chociaż zapewne nie dla wszystkich matematyków jest to raj (być może dla niektórych to nawet piekło), osobiście przychylam się do opinii Hilberta. Dlatego też uważam pojęcie równoliczności zbioru, bez którego nie mielibyśmy dostępu do „raju Cantora”, za piękne pojęcie: w istocie proste, a jednocześnie prowadzące do bardzo zaskakujących (może nawet przyprawiających o „zawrót głowy”) konsekwencji. Mam natomiast pewne wątpliwości co do jego doniosłości: „raj Cantora” wydaje się (prawie półtora wieku po jego odkryciu) piękną, a może nawet niezwykle piękną, lecz jednak izolowaną „wyspą”. Swą doniosłością, a zwłaszcza różnorodnością zastosowań, pojęcie równoliczności zbiorów, choć niewątpliwe ważne, nie może się – jak dotąd − równać na przykład z pojęciem symetrii.

PIĘKNO OBIEKTÓW MATEMATYCZNYCH

Natknąwszy się na „raj Cantora” – ów świat pełen egzotycznych obiektów − chciałbym poświęcić nieco uwagi pięknu obiektów matematycznych. (W odniesieniu do niektórych elementów matematyki wolę używać terminu „pojęcie matematyczne”, w odniesieniu do innych „obiekt matematyczny”. Sądzę, że u źródeł tych preferencji leżą pewne intuicje zbliżone do tych, które pozwalają mówić w metamatematyce o teorii matematycznej i o jej modelu bądź modelach. Poważna próba zastosowania tego rozróżnienia wymagałaby podjęcia problemów daleko wykraczających poza obszar estetyki matematyki. Muszę się więc ograniczyć do intuicji).

Zacznijmy od uwagi wykraczającej poza estetykę matematyki – uwagi należącej do najbardziej tradycyjnego obszaru estetyki, czyli do sztuki. Jak sądzę, jedną z jakości estetycznie doniosłych w sztuce (zwłaszcza współczesnej, a szczególnie w malarstwie) jest egzotyka. Zamiast przeprowadzać ogólne rozważania[19], odwołam się do konkretnego przykładu. W malarstwie dwudziestego wieku egzotyczny świat wykreował Salwador Dali. Zapewne dokonanie takie można przypisać i innym artystom, lecz to on uchodzi – moim zdaniem niebezpodstawnie – za jednego z największych malarzy dwudziestowiecznych. Dlaczego? Otóż, po pierwsze, niezależnie od tego, co sądzimy o treści jego obrazów, nie sposób odmówić mu rzemieślniczej sprawności – technicznego mistrzostwa. Po drugie, egzotyka jego malarstwa nie jest „nachalna”: wystarczy kilka niewielkich modyfikacji znanego nam,

[18] D. H i l b e r t, *O nieskończoności*, tłum. R. Murawski, w: *Filozofia matematyki. Wybór tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, Wydawnictwo UAM, Poznań 1986, s. 296.

[19] Zob. np. A. B a n a c h, *O potrzebie egzotyzmu*, Wydawnictwo Literackie, Kraków 1980.

„naturalnego" świata (ukazanie powyginanych zegarów czy płonącej żyrafy), by uzyskać świat „egzotyczny". Po trzecie, przedstawienie owego „egzotycznego" świata nie jest (wyłącznie) celem samym w sobie, lecz sposobem powiedzenia czegoś być może istotnego także o „naszym" świecie.

Wróćmy do matematyki. Pod koniec dziewiętnastego wieku zaczęły się w niej pojawiać obiekty, które zasługują – jak sądzę – na miano „egzotycznych". Wskażę na dwa z nich. Pierwszy to w istocie nie jeden obiekt, ale (nieskończony) zbiór obiektów. Wszystkie jego elementy mają wszakże jedną wspólną fundamentalną cechę, która czyni je obiektami egzotycznymi (i z punktu widzenia tradycyjnej matematyki, i z punktu widzenia intuicji). Jest to zbiór funkcji ciągłych (określonych na zbiorze liczb rzeczywistych), które nie mają pochodnej w żadnym punkcie. Nie chcąc posługiwać się definicjami formalnymi, odwołam się do intuicji geometrycznych: Funkcja ciągła to funkcja, której wykres nie ma „luk" („skoków") i można – jak by się wydawało – narysować go jednym (ciągłym właśnie) ruchem. Funkcja ciągła (i tylko ciągła) ma w pewnym punkcie pochodną, jeśli jej wykres ma w tym punkcie styczną (prostą leżącą „bardzo blisko" krzywej w pewnym otoczeniu danego punktu). Nietrudno podać przykłady funkcji ciągłych niemających w pewnym punkcie pochodnej (stycznej). Najprostszym i najbardziej intuicyjnym przykładem jest funkcja „wartość bezwzględna" ($y = |x|$)[20]. Nietrudno zauważyć, że funkcja ta nie ma pochodnej (stycznej) w punkcie zero[21]. Wychodząc od tego przykładu, łatwo narysować funkcję, która miałaby dowolną (lecz skończoną) liczbę takich punktów (zwanych punktami nieróżniczkowalności). Nieco tylko trudniejsze – choć w dalszym ciągu raczej zgodne z intuicją – byłoby skonstruowanie funkcji o nieskończonej liczbie takich punktów (jak „nieskończona piła"). Zaskakującym odkryciem wielkiego niemieckiego matematyka Karla Weierstrassa (warto dodać, że pod kierunkiem jednego z jego uczniów, Lea Koenigsbergera, doktorat z matematyki napisał Edmund Husserl, który sam również należał do uczniów Weierstrassa) była funkcja ciągła, niemająca pochodnej (stycznej) w żadnym (sic!) punkcie. Interesującą – zwłaszcza dla filozofów – tego konsekwencją wydaje się fakt, że jest to funkcja ciągła dobrze (precyzyjnie, jednoznacznie) zdefiniowana, lecz graficznie niereprezentowalna, czyli – inaczej mówiąc – nie posiada ona wykresu. Dodajmy, że ma ona względnie prostą (choć bynajmniej nietrywialną) konstrukcję[22]. Chociaż funkcja ta jest niewątpliwie egzotycznym obiektem matematycznym, jej piękno nie ogranicza się do egzotyki (i konstrukcji). Związane

[20] Przypomnijmy: $|x| = x$ dla x nieujemnych i $|x| = -x$ dla x ujemnych. Wykres tej funkcji składa się z dwóch półprostych stykających się w punkcie $x=0$, w którym tworzą one „ostrze".

[21] Jeżeli funkcja ma w danym punkcie styczną, to z definicji ma ona styczną lewostronną i prawostronną i są one sobie równe. Tymczasem omawiana funkcja wprawdzie ma w punkcie zero obie styczne (lewo- i prawostronną), ale są one różne, a więc styczna sensu stricto nie istnieje.

[22] Jej omówienie zajęłoby niestety zbyt wiele miejsca.

jest ono również – a może przede wszystkim – z rolą, jaką funkcja owa odgrywa w pojmowaniu „świata" funkcji. Można by powiedzieć, że pozwala ona wysubtelnić nasze rozumienie jednego z najważniejszych pojęć matematyki (a także fizyki czy filozofii), jakim jest pojęcie ciągłości. Jeśli dodamy, że – jak się później okazało – funkcji tego rodzaju jest „bardzo dużo" (w dającym się precyzyjnie określić sensie: jest ich więcej niż funkcji „porządnych", czyli zgodnych z naszą intuicją), to dostrzeżemy doniosłość odkrycia Weierstrassa.

Chciałbym również wspomnieć o ciekawym obiekcie, jakim jest tak zwana krzywa Peana. Ogólna definicja krzywej – podana przez Camille'a Jordana – określa ją jako ciągły obraz odcinka [0,1]. Okazuje się, że istnieje krzywa (odkryta przez Giuseppego Peana), która wypełnia dokładnie kwadrat (jednostkowy). Uznanie, że obiekt dwuwymiarowy, kwadrat, to krzywa, jest niezgodne z intuicją, definicja Jordana wydaje się natomiast intuicyjna. Znajomość krzywej Peana pomaga więc wysubtelnić naszą intuicję geometryczną.

Przypomnijmy też ciekawy (i dość szeroko znany poza obszarem matematyki) obiekt, jakim jest tak zwana wstęga Möbiusa, którą scharakteryzować można jako powierzchnię jednostronną, czyli mającą tylko jedną stronę. Oprócz wielu właściwości, których opis wymagałby wprowadzenia aparatu formalnego, obiekt ten posiada interesujące cechy, które można scharakteryzować w sposób intuicyjny. Przykładowo: rozcięcie wstęgi wzdłuż krzywej dzielącej jej powierzchnię na dwie części powoduje nie – jak można byłoby się spodziewać – jej rozpad na dwa „kawałki", lecz jej wydłużenie i przekształcenie w powierzchnię dwustronną (co można sprawdzić empirycznie – za pomocą nożyczek!). Nieco podobny do wstęgi Möbiusa obiekt stanowi tak zwana butelka Kleina. Jej krótka charakterystyka nie jest jednak możliwa, ograniczę się więc do tej krótkiej wzmianki mającej zasugerować, że wstęga Möbiusa to tylko jeden z wielu „egzotycznych" obiektów geometrycznych (prawdopodobnie najprostszy).

Fragment poświęcony pięknu obiektów matematycznych pragnę zakończyć kilkoma uwagami na temat fraktali. Jednym z powodów, które skłoniły mnie do tego, są słowa Jacka Kuderowicza, autora (ze względu na cytowaną tu jego wypowiedź warto może dodać, że był on profesorem na Wydziale Elektroniki Politechniki Warszawskiej) znanego polskiego podręcznika poświęconego teorii tych obiektów: „Często stawiane jest pytanie, do czego służą fraktale i dlaczego tak dużo ludzi na świecie zajmuje się tym tematem. Przypuszczalnie najważniejszym [sic! – W.C.] powodem jest to, że niektóre fraktale są bardzo ładne i sprawiają wiele radości tym, którzy je odkrywają, i tym, którzy oglądają"[23]. (Nieco dalej czytamy jednak: „Podstawowe proble-

[23] J. K u d r e w i c z, *Fraktale i chaos*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne Warszawa 1993, s. 19.

my geometrycznej teorii równań różniczkowych opisujących zjawiska przyrodnicze nie dadzą się rozwiązać bez fraktali”[24]). Poczynię najpierw dwie uwagi historyczne.

Po pierwsze, głównym twórcą teorii fraktali był Benoît Mandelbrot. Czy czuł się Polakiem – nie wiem (dostępne mi źródła nic na ten temat nie mówią), ale faktem jest, że urodził się w Warszawie i tu spędził pierwszych dwanaście lat swego życia. Po drugie, jeden z pierwszych przykładów fraktali, uznawany dzisiaj za klasyczny, stanowi – odkryty w roku 1915 (a więc ponad pół wieku przed powstaniem teorii fraktali) – dywan Sierpińskiego (nazwany tak na cześć jego odkrywcy, Wacława Sierpińskiego – jednego z najwybitniejszych polskich matematyków). Po trzecie, fraktale są szczególnie interesującym obiektem z punktu widzenia problematyki podjętej w niniejszym tekście: można albo, abstrahując od ich matematycznej natury, traktować je jako sui generis dzieła sztuki, albo skupić się na ich matematycznej istocie. Można jednak również − i takie stanowisko jest mi najbliższe – traktować oba podejścia jako komplementarne, uznając ową komplementarność za dodatkowy „składnik” estetycznej wartości fraktali.

Najbardziej bodaj znanym fraktalem jest tak zwany zbiór Mandelbrota[25]. Jego wizualne reprezentacje są – moim zdaniem – piękne w tym dokładnie sensie, w jakim piękne są na przykład obrazy Pieta Mondriana czy Paula Klee. Powiedziałbym nawet (z pełną świadomością głęboko subiektywnego charakteru tej deklaracji), że są one piękniejsze od wielu dzieł wybitnych artystów (zwłaszcza tych zaliczanych do abstrakcjonistów), a fakt, że reprezentacje te powstają za pomocą komputera, nie zaś pędzla, jest mało istotny. Gdyby nawet o fraktalu nie można było nic więcej powiedzieć, to i tak jego odkrycie byłoby ważnym wydarzeniem w historii kultury. A przecież jest to obiekt niezwykle piękny również z czysto matematycznego punktu widzenia. Oto, co mówi o nim Roger Penrose: „Co to za dziwny, zmienny i cudownie skomplikowany świat, który niespodziewanie odkryliśmy? […] Jest to obiekt ze sfery matematyki czystej […] Bez wątpienia jest on niezwykle skomplikowany, a mimo to można go wygenerować za pomocą bardzo prostej reguły!”[26] Co jeszcze można byłoby tu o nim powiedzieć? – Przede wszystkim to, że w jego definicji podstawową rolę odgrywają liczby zespolone (które pojawiły się już

[24] Tamże.

[25] Na poświęconej mu stronie anglojęzycznej Wikipedii (zob. hasło „Mandelbrot set”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set) poza bardzo dobrym i szczegółowym omówieniem różnorodnych własności zbioru Mandelbrota można znaleźć wiele (znaczenie więcej niż na stronie polskiej) ilustracji pokazujących różne fragmenty tego zbioru, który – z uwagi na swą matematyczną strukturę – nie jest w całości reprezentowalny wizualnie.

[26] P e n r o s e, *Nowy umysł cesarza*, s. 99. Uwagi matematyczne na temat konstrukcji zbioru Mandelbrota por. tamże, s. 113-116.

na początku tego tekstu: $i^2 = -1$). A także to, że struktura zbioru Mandelbrota jest piękną ilustracją pojęcia nieskończoności (im bardziej zagłębiamy się w ten zbiór – a możemy wchodzić weń coraz głębiej i głębiej – tym bardziej skomplikowaną rzeczywistość napotykamy). Nie od rzeczy będzie też zauważyć, że samo odkrycie zbioru Mandelbrota związane jest z wykorzystaniem komputerów, które odegrały też ważną rolę w ich badaniu. Zakończmy te uwagi, podkreślając (między innymi za Kudrewiczem), że fraktale – piękne i wizualnie, i matematycznie – są też ważnym narzędziem badania przyrody. Myślę, że nic to nie ujmuje ich pięknu: przeciwnie – piękno to wzbogaca.

PIĘKNO DOWODÓW

Przejdźmy teraz do innego aspektu piękna matematyki. Zacznijmy od obserwacji historycznej. Chociaż posiadamy już dużą wiedzę o matematyce babilońskiej czy egipskiej, to jednak za ojców naszej (europejskiej) matematyki uważamy Talesa i Pitagorasa. Dlaczego? – Dlatego, iż uważamy, że to za ich między innymi sprawą dokonała się w matematyce głęboka rewolucja. Interesującą i prostą jej charakterystykę sformułował wybitny rosyjski matematyk Igor Szafarewicz: „Jeśli patrzymy na ten decydujący moment w dziejach logiki, moment, kiedy zrobiła ona pierwszy krok i kiedy zaistniała podstawa, na której się opiera – mam na myśli dowód logiczny – to widzimy, że stało się to z materiałem, który w istocie wykluczał samą możliwość praktycznych zastosowań. Pierwsze twierdzenia Talesa z Miletu, jak na przykład to, że średnica dzieli koło na dwie równe części, były stwierdzeniami oczywistymi dla każdego rozsądnego człowieka. Geniusz [sic! –W.C.] był potrzebny nie na to, by przekonywać o prawdziwości takich stwierdzeń, ale na to, by pojąć, że potrzebują one dowodów. Praktyczna wartość takich odkryć jest oczywiście zerowa”[27]. Można byłoby powiedzieć – z niewielką tylko przesadą – że najistotniejszym składnikiem europejskiej matematyki jest dowód (tak zwana hipoteza Riemanna – jakkolwiek fascynująca i doniosła – nie jest twierdzeniem matematycznym, ponieważ jej nie udowodniono). W książce, w której zebrano różne ciekawe dowody matematyczne, czytamy: „Paul Erdős[28] lubił mówić o Księdze, w której Bóg gromadzi doskonałe [sic! – W.C.] dowody twierdzeń matematycznych; wszak, jak głosił Godfrey H. Hardy, «nie ma na świecie miejsca dla brzydkiej matematyki». Erdős mawiał też, że nikt nie

[27] Cyt. za: D a v i e s, H e r s c h, dz. cyt., s. 54n.

[28] Paul Erdős (1913-1996), Węgier, to jeden z największych matematyków dwudziestego wieku. Tak zwana liczba Erdősa stanowi swego rodzaju miarę pozycji matematyka w matematycznej społeczności (im liczba ta jest mniejsza, tym lepiej).

musi wierzyć w Boga, ale każdy, kto jest matematykiem, powinien wierzyć w istnienie Księgi”[29]. By na konkretnym przykładzie pokazać doniosłość miejsca, jakie w obrębie „świata matematyki” zajmują dowody, zauważmy, że przedstawiono kilkadziesiąt różnych dowodów ważnego twierdzenia z zakresu algebry, zwanego niekiedy zasadniczym albo podstawowym (zgodnie z którym każde równanie algebraiczne o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek będący liczbą zespoloną). Myślę, że można zaryzykować hipotezę − chociaż jej weryfikacja wymagałaby trudnych badań historycznomatematycznych − iż jednym z motywów poszukiwania nowych dowodów twierdzeń, w których prawdziwość nikt już nie wątpi, jest pragnienie znalezienia dowodów ładniejszych (matematycy częściej chyba mówią: bardziej eleganckich) niż dotychczas znane.

Dyskusja nad estetyczną wartością dowodów matematycznych byłaby (znacznie?) trudniejsza niż nad kwestią piękna wzorów czy obiektów matematycznych. Ograniczę się więc do przytoczenia uwag Hardy’ego, wybitnego matematyka angielskiego, który był szczególnie wrażliwy na estetyczną stronę matematyki: „Wzorce będące dziełem matematyka, podobnie jak wzorce malarza lub poety, muszą być piękne; idee, tak jak barwy czy słowa, muszą pasować do siebie w harmonijny sposób. Piękno jest pierwszym sprawdzianem: na świecie nie ma miejsca dla brzydkiej [sic! – W.C.] matematyki”[30]. Jako przykład pięknego dowodu można zatem przytoczyć dowód najstarszego twierdzenia teorii liczb, zgodnie z którym liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Zakłada się, że – przeciwnie – liczb pierwszych jest skończenie wiele, a zatem można utworzyć ich iloczyn. Jeśli dodać do niego liczbę 1, to otrzyma się liczbę, która jest albo pierwsza, albo złożona. Pierwsza ewentualność jest – na mocy przyjętego założenia – niemożliwa. Liczba ta musiałaby być zatem liczbą złożoną, a więc podzielną przez jakąś liczbę pierwszą. Nie można jej jednak podzielić przez żadną z użytych w jej definicji liczb. Tak więc zdefiniowaliśmy liczbę, która nie może być ani pierwsza, ani złożona. Musimy więc odrzucić przesłankę, która doprowadziła nas do tego wniosku. To klasyczny dowód przez sprowadzenie do sprzeczności: „*Reductio ad absurdum*, tak lubiane przez Euklidesa, jest jedną z najdoskonalszych broni matematyka. To gambit o wiele wspanialszy niż jakikolwiek gambit szachowy: szachista może poświęcić pionek bądź nawet figurę, a matematyk poświęca całą partię”[31]. Ten sam charakter ma omawiany przez Hardy’ego dowód twierdzenia o niewy-

[29] M. A i g n e r, G.M. Z i e g l e r, *Dowody z Księgi*, tłum. P. Strzelecki, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 7.

[30] G.H. H a r d y, *Apologia matematyki*, tłum. M. Ferdyszak, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997, s. 63.

[31] Tamże, s. 69.

mierności pierwiastka z dwóch[32]: zakłada się, że pierwiastek ten jest równy pewnemu ułamkowi, co do którego możemy rzecz jasna założyć, że jest nieskracalny[33]. Proste arytmetyczne przekształcenia tej równości prowadzą do wniosku, że i licznik, i mianownik ułamka są podzielnie przez dwa, a więc ułamek jest – wbrew wyjściowemu założeniu – skracalny. Wydaje się, że oba omówione tu dowody spełniają jednocześnie dwa kryteria: są proste (w tym sensie, że dla zrozumienia kolejnych kroków wystarczy bardzo elementarna wiedza matematyczna – i to wykorzystywana w prosty sposób: w obu przypadkach liczba kroków jest niewielka), a jednocześnie – jak to matematycy lubią mówić – nietrywialne (w punkcie wyjścia potrzebny jest jakiś pomysł, który bynajmniej sam się nie narzuca – zwłaszcza w przypadku twierdzenia o liczbach pierwszych). Połączenie prostoty i nietrywialności pozwala uznać oba dowody za piękne.

Mówiąc o pięknie dowodów matematycznych parę słów warto może powiedzieć o dowodach – brzydkich. Przykładem takiego dowodu jest chyba dowód tak zwanego twierdzenia o czterech barwach. Jego intuicyjny sens jest bardzo prosty: dla pokolorowania „mapy politycznej" (takiej, na której żadne dwa „kraje" nie stykają się w jednym punkcie, lecz ich granica jest krzywą – choćby bardzo krótką) w taki sposób, aby żadne dwa graniczące ze sobą „kraje" nie były pokolorowane tak samo – wystarczą cztery kolory. Twierdzenie zrozumiałe (choć bynajmniej nieoczywiste: równie dobrze – z intuicyjnego punktu widzenia – minimalna liczba kolorów mogłaby wynosić pięć albo siedemnaście, albo…), ciekawe, choć nieposiadające dalekosiężnych konsekwencji. Jego dowód nie opierał się jednak na żadnej „idei" czy „pomyśle", lecz polegał na zbadaniu (za pomocą komputera) tysiąca dziewięciuset trzydziestu sześciu przypadków szczególnych. To połączenie umiarkowanej doniosłości samego twierdzenia z (względną rzecz jasna) trywialnością jego dowodu – sprawia, że dowód ten zasługuje na miano brzydkiego.

PIĘKNO ROZWOJU MATEMATYKI

Spróbujmy, wychodząc od analizy roli i estetycznych walorów dowodów matematycznych, zrobić krok kolejny. Spróbujmy zastanowić się nad estetycznymi walorami matematyki jako całości. Powiedziałbym, że jest to krok naturalny: wszak to dowody (do pewnego stopnia także − analogiczne do nich – definicje pojęć matematycznych) spajają twierdzenia matematyczne w ca-

[32] Przez wielu historyków twierdzenie to (i jego dowód) uważane jest za źródło pierwszego kryzysu w dziejach matematyki.

[33] Jak pamiętamy, każdy ułamek może zostać zapisany w postaci ułamka nieskracalnego.

łość. Można byłoby powiedzieć, że matematyka jest swego rodzaju „strukturą architektoniczną”, niczym Sagrada Familia Gaudiego nieukończoną, lecz tak jak barcelońska bazylika – piękną.

Myślę też, że mówiąc o pięknie matematyki, można byłoby posłużyć się także metaforą muzyczną i porównać historię matematyki do, powiedzmy, symfonii (choć osobliwej – historia muzyki takiej nie zna – pozbawionej finału, o rosnącej liczbie części). Posługując się tą metaforą, pragnę zasugerować, że rozwój matematyki nie jest procesem chaotycznym, lecz charakteryzuje go wewnętrzna logika – logika, która sama jest też piękna. Nie potrafię w tej chwili dokonać wystarczająco systematycznej analizy tej logiki i jej piękna. Muszę ograniczyć się do zasugerowania kierunku takiej analizy poprzez wskazanie kilku kluczowych momentów tego procesu. O pierwszym – odkryciu idei dowodu matematycznego – pisał (cytowany wyżej) Szafarewicz. Drugi stanowiło ogłoszenie *Elementów* Euklidesa – pierwszego systemu dedukcyjnego. Trzeci – zainicjowane przez Kartezjusza dokonanie syntezy algebry i geometrii (stworzenie geometrii analitycznej). Czwarty zaś i być może jak dotąd najważniejszy − powstanie teorii mnogości (odkrycie „raju Cantora”). Chociaż wewnętrzne piękno teorii mnogości jest kontrowersyjne, ukazała ona, że wszystkie pojęcia matematyczne dają się zdefiniować za pomocą ogólnego pojęcia zbioru oraz pojęcia zbioru pustego. Oczywiście wykorzystanie tej możliwości w codziennej praktyce matematycznej byłoby niesłychanie kłopotliwe. Dzięki teorii mnogości można jednak spojrzeć na matematykę tak, jak spogląda się na Warszawę z najwyższego piętra Pałacu Kultury czy na Paryż z wieży Eiffla − a właśnie takie spojrzenie pozwala doświadczyć piękna miasta jako struktury urbanistycznej (dopełniając przeżycia estetyczne, których dostarczają nam katedry i pałace, parki i kręte uliczki). Jednym z ważnych − choć bardziej „lokalnych” niż powstanie teorii mnogości − wydarzeń było stworzenie analizy funkcjonalnej, w którym kluczową rolę odegrał genialny polski matematyk Stefan Banach. Analiza funkcjonalna pozwoliła spojrzeć na wiele różnych specjalistycznych działów matematyki jako zastosowań (czy wręcz ilustracji) jednej teorii.

Rozpoczęliśmy od piękna wzorów matematycznych, kończymy na pięknie rozwoju matematyki. Doszliśmy zatem do kresu drogi. Chcąc dalej wędrować, musielibyśmy się cofnąć i uważniej przyjrzeć się temu, co napotkaliśmy po drodze. Jest to jednak zadanie na inną okazję.

Na zakończenie dodajmy jeszcze kilka słów o drodze w pewnym sensie „równoległej” do tej, do której kresu właśnie dotarliśmy: nie istnieje (o ile mi wiadomo) wyodrębniona dyscyplina, która nosiłaby nazwę „estetyka matematyki”. Nie znaczy to, że aspekty estetyczne matematyki nie były zauważane. Już Arystoteles pisał: „Ponieważ dobro i piękno różnią się (bo pierwsze występuje w działaniu, a drugie, piękno, znajduje się także w bytach nieruchomych), wobec tego ci filozofowie, którzy twierdzą, ża nauki matematyczne nic nie mówią ani o pięknie, ani o dobru, są w błędzie. Nauki te mówią wiele o jednym i drugim i ujawniają je; jeżeli nie wymieniają ich wyraźnie, ale wykazują ich skutki i definicje, to nie można twierdzić, że niczego o nich nie mówią. Głównymi formami piękna są porządek, symetria i wyrazistość, czym odznaczają się szczególnie nauki matematyczne. Ponieważ zaś te formy (mianowicie porządek i wyrazistość) są przyczynami wielu następstw, jest przeto jasne, że nauki te muszą również omawiać, jako przyczynę pewnego rodzaju, przyczynę, o której mówimy, mianowicie piękno”[34]. Z pewnością, rozwijając estetykę matematyki, warto byłoby wydobyć z dzieł filozofów i matematyków rozproszone rozważania o pięknie w matematyce. Ale to już zadanie do podjęcia w innym tekście.

O MATEMATYCE PIĘKNA

Jak próbowałem pokazać, matematyka rozumiana autonomicznie (gdy abstrahuje się od jej zastosowań) charakteryzuje się wielorakim wewnętrznym pięknem. Wszelako wielorakość zastosowań matematyki także uważam za „składnik” jej piękna. Być może występuje tu analogia z malarstwem przedstawiającym, a w szczególności portretowym czy krajobrazowym, albo – z tak zwaną muzyką programową (zbadanie tego przypuszczania wymagałoby osobnego tekstu). Niektóre z zastosowań matematyki (na przykład liczb w rozmaitych rachunkach) są dość oczywiste, banalne − w niewielkim stopniu zatem piękne (choć przecież trudno byłoby powiedzieć, że brzydkie). Spotykamy też zastosowania fascynujące, przede wszystkim w fizyce (na przykład zastosowania liczb zespolonych). Piękno fizyki i jego relacje z pięknem matematyki to zagadnienie i obszerne, i trudne, nie sposób więc podejmować go tu w bardziej systematyczny sposób[35]. Chciałbym jednak choć wspomnieć o dwóch wielkich fizykach: Albercie Einsteinie i Paulu A.M. Diracu, którzy pięknu teorii matematycznych przypisywali szczególnie doniosłą rolę w tworzeniu na ich podstawie teorii fizycznych[36].

---

[34] A r y s t o t e l e s, *Metafizyka*, ks. III, 1078 a 52-1078 b 4, tłum. K. Leśniak, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009, s. 233. Por. też: R. M u r a w s k i, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, s. 29.

[35] Interesujące rozważania na ten temat znaleźć można w zbiorze esejów wielkiego hinduskiego astrofizyka Subrahmanyana Chandrasekhara (zob. S. C h a n d r a s e k h a r, *Prawda i piękno. Estetyka i motywacja w nauce*, tłum. P. Amsterdamski, Prószyński i S-ka, Warszawa 1999). Na szczególną uwagę zasługują eseje *Piękno i dążenie do piękna w nauce* (zob. tamże, s. 97-116) oraz *Estetyczne podstawy ogólnej teorii względności* (zob. tamże, s. 207-239).

[36] Wnikliwą analizę poglądów epistemologicznych obu wielkich fizyków przedstawił Andrzej Staruszkiewicz (zob. A. S t a r u s z k i e w i c z, *Filozofia fizyki teoretycznej Einsteina i Diraca*, „Przestrzenie Teorii” 2002, nr 1, s. 149-160).

Zamierzam w tym miejscu skupić się na głęboko nietrywialnym zastosowaniu matematyki, które bezpośrednio wiąże się z tematem tego artykułu. Mam na myśli wykorzystanie matematyki w badaniach nad sztuką, czyli dziedziną kultury, której związki z pięknem są najoczywistsze, a także najczęściej – i od dawna – badane. Mówiąc dokładniej, zamierzam skupić się na badaniach nad tak zwanymi sztukami pięknymi (plastycznymi, wizualnymi).

Odkrycie związków między matematyką a sztuką możemy przypisać pitagorejczykom, którzy zajmowali się muzyką, nie zaś na przykład malarstwem. Sądzę jednak, że związki między matematyką a muzyką nie są tak głębokie i interesujące, jak te, które łączą matematykę ze sztukami wizualnymi. Podejmowano również próby zastosowania matematyki w badaniach literaturoznawczych, ale nie przyniosły one – jak się wydaje – szczególnie frapujących rezultatów (odpowiedź na pytanie o przyczyny tego stanu rzeczy wymagałaby zapewne szerszych badań).

Dość oczywisty, a zarazem ważny pozostaje fakt, że matematyka i sztuki plastyczne mają wspólny przedmiot: przestrzeń, chociaż w inny sposób podchodzą do jego opisu i analizy, co innego jest ich celem. Niemniej jednak wspólnota przedmiotu zainteresowania nie wydaje się sprawą błahą.

Systematyczna analiza związków między matematyką a sztukami pięknymi mogłaby być przedmiotem obszernej książki[37]. Z konieczności ograniczę się do kilku wybranych przykładów.

Rozpocznę od problematyki ornamentu, odwołując się przede wszystkim do książki wybitnego polskiego matematyka Stanisława Jaśkowskiego[38]. Przede wszystkim należy podkreślić, że ornamenty[39], którym jest poświęcona, stanowią niewątpliwie jeden z najstarszych przejawów ludzkiej twórczości artystycznej, początkowo ściśle związanej z potrzebami życia codziennego (zdobiono wszak najrozmaitsze przedmioty użytkowe), ale świadczącej o obecności – choćby w zalążkowej postaci – potrzeb innych niż te, których źródłem są wymogi biologicznego przetrwania i reprodukcji. Ornamenty w szerokim rozumieniu do dziś pełnią ważną funkcję w sztuce – zwłaszcza użytkowej. W matematyce opisującej ornamenty kluczową rolę odgrywa niezwykle głębokie (i piękne) pojęcie symetrii. „Pojęcie symetrii − stwierdza Jaśkowski − ma podstawowe znaczenie w matematyce ornamentu i ulega wyraźnej przemianie, otrzymując z biegiem czasu coraz szersze znaczenie.

[37] Szerzej na temat wybranych aspektów tej relacji zob. M.C. G h y k a, *Złota liczba. Rytuały i rytmy pitagorejskie w rozwoju cywilizacji zachodniej*, tłum. I. Kania, Universitas, Kraków 2014.

[38] Zob. S. J a ś k o w s k i, *Matematyka ornamentu*, PWN, Warszawa 1957.

[39] Istotnym – a być może najważniejszym – uzupełnieniem matematycznych badań nad ornamentami są analizy wybitnego historyka sztuki Ernsta H. Gomrbicha (zob. E. H. G o m b r i c h, *Zmysł porządku. O psychologii sztuki dekoracyjnej*, tłum. D. Folga-Januszewska, Universitas, Kraków 2009).

Postęp w matematyce ornamentu, dokonany w końcu XIX i pierwszej połowie XX wieku [sic! – W.C.] wiąże się ściśle z uogólnieniem znaczenia wyrazu «symetria»"[40]. Symetrie (w szczególności symetrie ornamentów) opisujemy za pomocą obiektów algebraicznych zwanych grupami. Jak się okazuje dzięki matematyce, istnieje dokładnie siedemnaście takich grup (czyli, swobodnie rzecz ujmując, siedemnaście typów ornamentów; oczywiście mówiąc o typie ornamentu, mamy na myśli jego fundamentalne aspekty geometryczne, abstrahujemy na przykład od barwy figur geometrycznych tworzących ornamenty). Badania historyków sztuki wskazują z kolei, że wszystkie siedemnaście typów znanych było już starożytnym Egipcjanom – można je odnaleźć w zachowanych zabytkach. „Fakt ten − zdaniem szwedzkiego matematyka Larsa Gardinga − świadczy o tym, że człowiek posiada bardzo wyrobioną intuicyjną zdolność postrzegania symetrii. Niektórzy autorzy chcą widzieć we wczesnym odkryciu wszystkich klas ornamentów narodziny teorii grup"[41].

Od pojęcia ornamentu i symetrii przejdźmy do pojęcia perspektywy i rzutowania. Wybitny amerykański matematyk i historyk matematyki Morris Kline pisze: „Najbardziej oryginalne dzieło matematyczne siedemnastego stulecia – stulecia, w którym motywacji do aktywności matematycznej dostarczała w największym stopniu nauka – zainspirowane zostało sztuką malarską. Tworząc system perspektywy zbieżnej, malarze wprowadzali nowe idee geometryczne i formułowali wiele zagadnień, które wyznaczyły całkowicie nowy kierunek badań. W ten sposób artyści spłacili swój dług matematyce"[42]. Rewolucja, która zmieniła dogłębnie i trwale malarstwo europejskie, zrodziła się z eksperymentów artystycznych (ale i teoretycznych) malarzy Renesansu, od Filippa Brunelleschiego po Leonarda da Vinci i Albrechta Dürera. Kluczowe dla niej pojęcie perspektywy zyskało teoretyczny fundament w geometrii rzutowej – dziale matematyki, którego początki wiążą się z takimi postaciami, jak Johannes Kepler, Gérard Desargues czy Blaise Pascal (który był nie tylko matematykiem, filozofem i mistykiem, ale także inżynierem i wielką postacią literatury francuskiej); nowoczesną, systematyczną postać nadał mu dwa stulecia później Jean-Victor Poncelet.

Na zakończenie tej części artykułu chciałbym przywołać postać uznawaną − przez wielu, do których grona się dołączam − za symbol głębokich związków między sztuką, matematyką i filozofią. Mam tu na myśli wybitnego grafika Mauritsa Cornelisa Eschera[43]. Jego twórczość cieszy się uznaniem

[40] J a ś k o w s k i, dz. cyt., s. 17.

[41] L. G a r d i n g, *Spotkanie z matematyką* , Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993, s. 62.

[42] M. K l i n e, *Mathematics in Western Culture*, Penguin Books, London 1972, s. 170.

[43] Linki do ok. 30 (!) stron Wikipedii poświęconych poszczególnym, najbardziej znanym dziełom Eschera można znaleźć na stronie https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher .

szczególnie wśród matematyków i fizyków. Wiele uwagi poświęca jej na przykład wspominany już Roger Penrose[44]. Do jej zwolenników należy również jeden z najwybitniejszych w wieku dwudziestym znawców geometrii, Harold S.M. Coxeter[45] (przyjaciel i doradca Eschera). Sztuce holenderskiego mistrza poświęcił on obszerny fragment swej powszechnie znanej książki *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, uchodzącej za jedną z najlepszych syntez wiedzy geometrycznej od czasów Euklidesa do połowy dwudziestego wieku[46].

*

Spróbujmy podsumować rozważania przeprowadzone w tym artykule oraz zarysować kierunki dalszych badań.

Jak się wydaje, przedstawione tu analizy piękna matematyki dowodzą – mimo ich cząstkowego i szkicowego charakteru – że estetyka matematyki może być równie interesującym obszarem badawczym, jak estetyka muzyki, malarstwa czy literatury.

Można tę (jak dotąd hipotetyczną) dyscyplinę filozoficzną uprawiać dla niej samej, warto też jednak pomyśleć o niej w szerszym kontekście. Po pierwsze − w kontekście filozofii matematyki. Dziś jest już ona dobrze rozwiniętą, bogatą w różnorodne koncepcje dyscypliną filozoficzną. O dynamicznym rozwoju filozofii matematyki pozwalają jednak mówić ontologia (metafizyka) matematyki (obiektów matematycznych) i jej epistemologia. Aksjologia matematyki natomiast właściwie nie istnieje. Estetyka matematyki stanowiłaby tylko jej część. Równie interesująca i ważna byłaby refleksja nad moralnym sensem matematyki. Dociekania takie mogłyby nawiązywać do idei Arthura Northa Whiteheada[47] czy wybitnego polskiego logika Jana Łukasiewicza (który odegrał istotną rolę między innymi w przekształcaniu logiki w dział matematyki)[48]. Po drugie, wprawdzie sztuka w dalszym ciągu

[44] Por. P e n r o s e, *Droga do rzeczywistości*, s. 32-35, 38, 48; t e n ż e, *Nowy umysł cesarza*, s. 182.

[45] Zob. S. H a r t, *Escher and Coxeter: A Mathematical Conversation*, „Brewminate: A Bold Blend of News and Ideas", 6 X 2017, https://brewminate.com/escher-and-coxeter-a-mathematical-conversation/.

[46] Por. H.S.M. C o x e t e r, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, tłum. R. Krasnodębski, PWN, Warszawa 1967, s. 74-76.

[47] Zob. A.N. W h i t e h e a d, *Matematyka i dobro*, tłum. J. Jusiak, M. Jałocho, „Colloquia Communia" 1987, nr 3-4, s. 160-172.

[48] „Logika jest moralnością myśli i języka" (zob. hasło „Szkoła lwowsko-warszawska", *Wikipedia*, https://pl.wikipedia.org/wiki/Szkoła_lwowsko-warszawska). Por. J. W o l e ń s k i, hasło „Lvov-Warsaw School", w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2019 edition, red. E.N. Zalta (https://plato.stanford.edu/entries/lvov-warsaw/).

dominuje jako przedmiot refleksji estetycznej, zauważalne są jednak zmiany zmierzające ku dostrzeżeniu i poddaniu analizie estetycznego aspektu innych niż sztuka obszarów rzeczywistości. Rozwija się na przykład estetyka natury (środowiska). „Krytykując dominujący nurt estetyki jako filozofii sztuki i upominając się o estetykę natury, filozofowie środowiskowi od razu poza tę ostatnią wykraczają, bowiem centralnym pojęciem ich estetyki nie jest pojęcie natury, lecz pojęcie środowiska (albo pejzażu) obejmującego zarówno naturalne, jak i artefaktualne otoczenie”[49].

Dodajmy, że już przed bez mała półwiekiem Andrzej Tyszka, filozof i socjolog sportu, pisał: „Sport przemawia do nas także, choć nie tylko, językiem piękna”[50]. Podkreślał, że nie we wszystkich dyscyplinach kryterium estetyczne odgrywa znaczącą rolę, ale we wszystkich sportach „gdzie kryterium rozstrzygania współzawodnictwa jest – nie miara długości, chronometr, waga, kolejność na mecie, ilość trafień, goli, koszów – lecz dziesięciopunktowa miara doskonałości wykonania ruchu, wszędzie tam piękno jest jednym z głównych celów”[51].

Sądzę, że estetyka badająca nie tylko piękno sztuki (i ewentualnie natury), ale także, z jednej strony, matematyki, z drugiej zaś − sportu (oraz wielu innych obszarów rzeczywistości), pozwoliłaby tworzyć pełniejszą filozofię piękna, bliższą zrozumieniu jego istoty.

Rozważania o pięknie matematyki i matematyce piękna chciałbym zakończyć sformułowaniem uwagi dotyczącej znaczenia filozoficznej refleksji nad związkami między matematyką a pięknem. Jednym z ważnych zadań filozofii jest refleksja nad kulturą (nad religią, nauką i sztuką, a także nad samą filozofią) − refleksja mająca autonomiczne znaczenie poznawcze, zmierzająca do prawdy o istocie kultury i jej poszczególnych składników oraz poszukująca tej prawdy dla niej samej. To, że istnieje estetyczny wymiar matematyki, jest częścią prawdy o niej – prawdy nie mniej ważnej niż prawdy geometrii czy algebry. Refleksja o matematyce i pięknie ma też istotny sens praktyczny (słowo to rozumiem tu nie w jego potocznym, pragmatyczno-utylitarystycznym sensie, lecz w jego sensie klasycznym, powiedzmy: arystotelesowsko-kantowskim). Od tego, jak wyraźnie dostrzega się wielość wartości, które przysługują matematyce, zależy (do pewnego stopnia, w grę wchodzą bowiem też rozmaite prozaiczne czynniki instytucjonalne czy finansowe) to, w jaki sposób się jej uczy i jak popularyzuje się ją w mass mediach. To zaś, jak się jej uczy i jak się ją upowszechnia, jest sprawą bardziej istotną niż mogłoby się wydawać.

---

[49] K. W i l k o s z e w s k a, *Nowe inspiracje w estetyce drugiej połowy XX wieku*, w: *Estetyki filozoficzne XX wieku*, red. K. Wilkoszewska, Universitas, Kraków 2000, s. 294.

[50] A. T y s z k a, *Olimpia i akademia. Szkice o humanistycznej treści sportu*, Wydawnictwo Sport i Turystyka, Warszawa 1970, s. 133.

[51] Tamże.

Wierzę − wiarę tę potrafiłbym choć częściowo uzasadnić racjonalnie, ale nie czas i miejsce po temu − że świat, w którym powszechniej występowałaby zdolność kontemplacji piękna i gotowość do niej (w tym kontemplacji piękna matematyki, piękna najbardziej „czystego”, „niesplecionego” ani z żądzą władzy czy pieniądza, ani z namiętnością erotyczną − tak jak splecione bywa piękno obecne na przykład w literaturze czy malarstwie[52]), byłby światem znacznie lepszym (w fundamentalnym – moralnym – sensie tego słowa)[53]. Wizja takiego świata to fragment bliskiej mi utopii…

BIBLIOGRAFIA / BIBLIOGRAPHY

Aigner, Martin, and Guenter M. Ziegler. *Dowody z Księgi*. Translated by Paweł Strzelecki. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002.

Arystoteles. *Metafizyka*. Translated by Kazimierz Leśniak. Warszawa: PWN, 1980.

Banach, Andrzej. *O potrzebie egzotyzmu*. Kraków: Wydawnictwo Literackie, 1980.

Chandrasekhar, Subrahmanyan. *Prawda i piękno: Estetyka i motywacja w nauce*. Translated by Piotr Amsterdamski. Warszawa: Prószyński i S-ka, 1999.

Coxeter, Harold S. M. *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*. Translated by Ryszard Krasnodębski. Warszawa: PWN, 1967.

Czajkowski, Waldemar. *Dwie kultury w perspektywie historycznej socjologii wiedzy*. In *Czy dwie kultury?*, edited by Jacek Rąb. Zabrze: Stowarzyszenie na Rzecz Rozwoju Nauki Polskiej, 2005.

Davies, Philip J., and Reuben Hersh, *Świat matematyki*. Translated by Roman Duda. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1994.

Garding, Lars. *Spotkanie z matematyką*. Translated by Tomasz Szapiro. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.

Ghyka, Matila C. *Złota liczba: Rytuały i rytmy pitagorejskie w rozwoju cywilizacji zachodniej.* Translated by Ireneusz Kania. Kraków: Universitas, 2014.

Gardner, Martin. “Słowo wstępne.” In Roger Penrose, *Nowy umysł cesarza: O komputerach, umyśle i prawach fizyki*. Translated by Piotr Amsterdamski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1995.

Gombrich, Ernst H. *Zmysł porządku: O psychologii sztuki dekoracyjnej*. Translated by Dorota Folga-Januszewska. Kraków: Universitas 2009.

Hardy, Godfrey H. *Apologia matematyki.* Translated by Marek Ferdyszak. Warszawa: Prószyński i S-ka, 1997.

[52] Być może z tego między innymi powodu muzyka (absolutna, pozbawiona tekstu czy choćby literackiego programu, na przykład *Das Wohltemperierte Klavier* Bacha czy symfonie Witolda Lutosławskiego) uważna bywa za najbliższą matematyce dziedzinę sztuki.

[53] Szafarewicz pisze, że „matematyka może służyć jako model do rozwiązania zasadniczego problemu naszej epoki: odkrycia najwyższego celu religijnego i zgłębienia znaczenia duchowej działalności ludzkiej” (cyt. za: D a v i e s, H e r s h, dz. cyt., s. 51).

Hart, Sarah. "Escher and Coxeter: A Mathematical Conversation." *Brewminate: A Bold Blend of News and Ideas.* October 6, 2017. https://brewminate.com/escher-and-coxeter-a-mathematical-conversation/.

Hilbert, David. *O nieskończoności.* Translated by Roman Murawski. In *Filozofia matematyki: Wybór tekstów klasycznych*, edited by Roman Murawski. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, 1986.

Hofstadter, Douglas R. *Goedel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. A Metaphorical Fugue on Minds and Machines in the Spirit of Lewis Carroll*. New York: Basic Books, 1979.

Jaśkowski, Stanisław. *Matematyka ornamentu*. Warszawa: PWN, 1957.

Kline, Morris. *Mathematics in Western Culture*. London: Penguin Books, 1972.

Kudrewicz, Jacek. *Fraktale i chaos.* Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.

"Mandelbrot set." *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set.

Murawski, Roman. *Filozofia matematyki: Zarys dziejów.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1995.

Penrose, Roger. *Droga do rzeczywistości: Wyczerpujący przewodnik po prawach rządzących Wszechświatem*. Translated by Jerzy Przystawa. Warszawa: Prószyński i S-ka, n.d.

———. *Nowy umysł cesarza: O komputerach, umyśle i prawach fizyki*. Translated by Piotr Amsterdamski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1995.

Staruszkiewicz, Andrzej. "Filozofia fizyki teoretycznej Einsteina i Diraca." *Przestrzenie Teorii* 1 (2002): 149−60.

Stróżewski, Władysław. *Ontologia*. Kraków: Znak, 2003.

———. "Estetyka fenomenologiczna." In *Estetyki filozoficzne XX wieku*, edited by Krystyna Wilkoszewska. Kraków: Universitas, 2000.

"Szkoła lwowsko-warszawska." *Wikipedia*. https://pl.wikipedia.org/wiki/Szkoła_lwowsko-warszawska.

Turzyński, Krzysztof. "Zgłębiając piękno matematyki." *Delta*, no. 4 (2014): 21.

Tyszka, Andrzej. *Olimpia i akademia: Szkice o humanistycznej treści sportu.* Warszawa: Wydawnictwo Sport i Turystyka, 1970.

Whitehead, Alfred North. "Matematyka i Dobro." Translated by Janusz Jusiak and Małgorzata Jałocho. *Colloquia Communia*, no. 3−4 (1987): 160−72.

Wilkoszewska, Krystyna, ed. *Estetyki filozoficzne XX wieku.* Kraków: Universitas, 2000.

———. "Nowe inspiracje w estetyce drugiej połowy XX wieku." In *Estetyki filozoficzne XX wieku*, edited by Krystyna Wilkoszewska. Kraków: Universitas, 2000.

Woleński, Jan. "Lvov−Warsaw School." *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2019 edition. Edited by Edward N. Zalta. https://plato.stanford.edu/entries/lvov-warsaw/.

Zeki, Semir, John Paul Romaya, Dionigi M. T. Benincasa, and Michael F. Atiyah. "The Experience of Mathematical Beauty and its Neural Correlates." *Frontiers in Human Neuroscience* 8 (2014), https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fnhum.2014.00068/full.

ABSTRAKT / ABSTRACT

Waldemar CZAJKOWSKI − Matematyka a piękno
DOI 10.12887/32-2019-3-127-07

W artykule podjęto próbę sprecyzowania sensu, w jakim można mówić o pięknie matematyki. Wyodrębniono w tym celu kilka jej elementów (wzory, matematyczne pojęcia i obiekty, dowody i rozwój matematyki) i przedyskutowano estetyczną specyfikę każdego z nich. Nieco miejsca poświęcono też roli matematyki w opisie sztuki – dziedziny kultury, w której znaczenie piękna jest najbardziej oczywiste. Wskazano również potrzebę rozwijania estetyki matematyki − zarówno jako działu filozofii matematyki, jak i jako części najszerzej rozumianej estetyki.

Słowa kluczowe: matematyka, piękno, estetyka matematyki, symetria

Kontakt: Katedra Stosowanych Nauk Społecznych, Wydział Organizacji i Zarządzania, Politechnika Śląska, ul. Roosevelta 26-28, 41-800 Zabrze
E-mail: waldemarczajkowski@wp.pl
Tel. 32 2777324

Waldemar CZAJKOWSKI − Mathematics and Beauty
DOI 10.12887/32-2019-3-127-07

The paper presents an attempt to make clear the meaning of the concept of the beauty of mathematics. To this purpose several elements of mathematics have been distinguished (formulae, mathematical concepts and objects, proofs, and the development of mathematics) and the aesthetic specificity of each of them has been discussed. Some attention is given also to the role mathematics plays in the description of art as the domain of culture in which the importance of beauty is most evident. The need to develop the aesthetics of mathematics as part of both philosophy of mathematics and aesthetics most broadly conceived has been indicated.

Keywords: mathematics, beauty, aesthetics of mathematics, symmetry

Contact: Katedra Stosowanych Nauk Społecznych, Wydział Organizacji i Zarządzania, Politechnika Śląska, ul. Roosevelta 26-28, 41-800 Zabrze, Poland
E-mail: waldemarczajkowski@wp.pl
Phone: +48 32 2777324